Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1986

Mathématiques I 4 heures

OPTION GÉNÉRALE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

PROBLÈME

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par la relation:

$$f(t) = t^3 + t.$$

Dans la partie I, on étudie la fonction réciproque g de f. Dans la partie II, on étudie un algorithme d'approximation de g à l'aide d'une suite de fonctions rationnelles. Enfin, dans la partie III, on étudie une approximation polynomiale de g par la méthode des moindres carrés.

I. Étude de g

1. *Variation de g*

a) Construire la courbe représentative C de la fonction f (unité graphique: 2 cm).

b) Montrer que f admet une fonction réciproque; soit g cette fonction. Ainsi, pour tout nombre réel x:

$$g^3(x) + g(x) = x.$$

Montrer que la fonction g est strictement croissante et impaire. Construire sa courbe représentative dans le même repère que C.

c) Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$; exprimer g' en fonction de g. En déduire sans calcul la variation de g'.

2. *Étude locale et asymptotique de g*

a) Montrer que g admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre. Expliciter ce développpement à l'ordre 3.

b) Montrer que $g(x) \sim x^{1/3}$ au voisinage de $+\infty$.

c) On écrit $g(x)$ sous la forme $x^{1/3}[1 + h(x)]$, où $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Expliciter la relation satisfaite par la fonction h. En déduire que la fonction $x \mapsto x^{2/3} h(x)$ admet en $+\infty$ une limite finie que l'on déterminera.

3. *Étude d'une primitive de g*

Soit G la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par la relation:

$$G(x) = \int_0^x g(u)\,du.$$

a) Calculer G en fonction de g.

b) Étudier la variation de G; étudier G au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

II. Approximation rationnelle de g

Dans cette partie, on prend x dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On interprète $g(x)$ comme l'unique solution de l'équation $t^3 + t = x$, c'est-à-dire comme l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec la droite D_x parallèle à l'axe des abscisses et d'ordonnée x. On se propose d'approcher $g(x)$ à l'aide de la suite de terme général $u_n(x)$ ainsi construite: on pose $u_0(x) = x$ et on prend pour $u_1(x)$ l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse x; on itère ce processus en considérant l'abscisse $u_{n+1}(x)$ du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse $u_n(x)$.

1. *Construction de l'algorithme d'approximation*

Soit t un nombre réel positif. Prouver que l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse t est égale à $\dfrac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}$.

On considère donc la suite définie par la relation de récurrence:

$$u_{n+1}(x) = \frac{2u_n^3(x) + x}{3u_n^2(x) + 1}$$

et la condition initiale $u_0(x) = x$.

2. *Étude graphique d'un exemple*

Dans cette question, on prend $x = 1$. Sur une même figure, tracer soigneusement l'arc de C correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ et construire $u_1(1)$ et $u_2(1)$ (unité graphique: 5 cm).

3. *Étude de l'algorithme*

Soit φ la fonction numérique qui à tout nombre réel positif t associe:

$$\varphi(t) = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}.$$

a) Étudier le signe de $t - \varphi(t)$.

b) Calculer la dérivée de φ. Étudier le signe de $\varphi'(t)$.

c) Déduire des questions *a*) et *b*) que l'intervalle $[g(x), x]$ est stable par φ.

En utilisant l'encadrement $0 \leqslant t^3 + t - x \leqslant t^3$, valable pour tout élément t de l'intervalle $[g(x), x]$, montrer que, sous cette dernière condition:

$$0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \frac{2}{3}.$$

4. *Étude de la convergence*

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n(x)$ appartient à $[g(x), x]$, que la suite $(u_n(x))$ est décroissante et qu'elle converge vers $g(x)$.

b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n:

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{2}{3}[u_n(x) - g(x)].$$

c) Soit a un nombre réel positif. On pose:

$$\beta_n = \sup_{x \in [0,\, a]} [u_n(x) - g(x)].$$

Prouver que $\beta_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n a$.

d) Prouver que, pour tout nombre réel positif t:

$$\varphi(t) - g(x) = [t - g(x)]^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1}.$$

Montrer que, pour tout élément t de l'intervalle $[g(x), x]$:

$$0 \leqslant \varphi(t) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}[t - g(x)]^2.$$

$\left(\text{On pourra étudier la variation de la fonction } t \mapsto \frac{3t}{3t^2 + 1}.\right)$

e) Calculer $u_n(1)$ pour $n \leqslant 4$. Vérifier que $u_4(1)$ est une valeur approchée de $g(1)$ à la précision 10^{-6}.

III. Approximation polynomiale de g par la méthode des moindres carrés

Soient a un nombre réel strictement positif, n un nombre entier naturel non nul et $S = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une suite d'éléments de $[0, a]$ distincts deux à deux. Pour tout nombre entier naturel p, on note E_p l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

1. *Produit scalaire sur E_n adapté à S*

a) Montrer que l'application qui à tout couple (P, Q) d'éléments de E_n associe le nombre réel:

$$(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) Q(x_k)$$

est un produit scalaire sur E_n.

b) Soit i un nombre entier naturel inférieur ou égal à n. Montrer qu'il existe un élément L_i de E_n et un seul prenant la valeur 1 au point x_i et la valeur 0 en tous les autres points de S.

c) Prouver que la famille $B = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormale de E_n.

d) Montrer qu'il existe un élément P_g de E_n et un seul tel que, pour tout nombre entier i appartenant à l'intervalle $[0, n]$, $P_g(x_i) = g(x_i)$; expliciter les composantes de P_g dans la base B.

2. *Approximation de g*

Soit p un nombre entier naturel strictement inférieur à n. Pour tout élément A de E_p, on pose:

$$N(A) = \sum_{k=0}^{n} [g(x_k) - A(x_k)]^2.$$

a) Interpréter $N(A)$ à l'aide du produit scalaire sur E_n.

b) Montrer qu'il existe un élément H_g de E_p et un seul tel que, pour tout élément A de E_p, $N(H_g) \leqslant N(A)$.

c) Montrer que le polynôme H_g est caractérisé par les relations:

$$(H_g \mid X^i) = (P_g \mid X^i), \quad \text{où } 0 \leqslant i \leqslant p.$$

d) On écrit H_g sous la forme:

$$H_g = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j X^j.$$

Expliciter un système linéaire admettant pour unique solution $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$..

e) En utilisant les résultats obtenus dans les parties II et III, indiquer les différentes étapes d'un algorithme permettant de calculer H_g.